Prof. Dr. Alfred Toth

Multiplikation und Distribution

In dankbarer Erinnerung meines Lehrers Prof. Dr. Max Bense
an seinem 105. Geburtstag.

1. Peano-Axiome, Addition und Multiplikation

1.1. Peano-Axiome

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$
3. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0$
4. $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n)$
5. $0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}: (n \in X \Rightarrow n' \in X) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$

In Benses an Russell angelehnter nicht-formaler Formulierung (Bense 1975, S. 168):

1. 0 ist eine Zahl.

2. Der Nachfolger irgend einer Zahl ist eine Zahl.

3. 0 ist nicht der Nachfolger irgend einer Zahl.

4. Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger.

5. Jede Eigenschaft der 0, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu.

1.2. Landaus Definition der Multiplikation

SATZ. Auf genau eine Art läßt sich jedem Zahlenpaar x, y eine natürliche Zahl, x · y genannt, so zuordnen, daß

1) $x \cdot 1 = x$ für jedes x

2) $x \cdot y' = x \cdot y + x$ für jedes x und jedes y (Landau 1930, S. 14).

1.3. Wittgesteins Beweis der Multiplikation $2 \cdot 2 = 4$

$(\Omega^{\nu})^{\mu}{}'x = \Omega^{\nu\times\mu}{}'x$ Def.

$\Omega^{2\times 2}{}'x = (\Omega^2)^2{}'x = (\Omega^2)^{1+1}x = \Omega^2{}'\Omega^2{}'x = \Omega^{1+1}{}'\Omega^{1+1}{}'x = (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x =$

$\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{1+1+1+1}{}'x = \Omega^{4}{}'\,x$ (Tractatus 6.2.4.1).

1.4. Asymmetrie von Addition und Multiplikation

$0 + 1 \quad \neq \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0$

$1 + 1 \quad = \quad 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$

$1 + 2 = 1 + 1 + 1 \quad = \quad 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3$

2. Wie die Asymmetrie von Addition und Multiplikation zeigt, ist es trotz Wittgensteins Beweis unmöglich, die Multiplikation durch die Addition auf der Grundlage der peanoschen Nachfolgefunktion zu definieren.

2.1. Nun hatte Bense drei semiotische Zahlen unterschieden: "Die Anzahl als (kardinale) Mengenzahl ist der iconische, die Zählzahl als (die durch die Nachfolgefunktion generierte) Zahlenordnung der indexikalische und die distanzsetzende Maßzahl der symbolische Objektbezug der Zahl" (1975, S. 172).

Kardinalzahl → (2.1)

Zählzahl → (2.2)

Maßzahl → (2.3)

Hier liegt ein semiotisch, d.h. objekttrichotomisch vollständiges semiotisch-arithmetisches Abbildungssystem vor. Während einzelne Zahlen, solange keine Operation involviert ist, als kardinale Zahlen iconisch sind vermöge ihrer Zugehörigkeit zur Menge der natürlichen Zahlen, setzen sowohl die Addition als auch die Multiplikation, da zu ihrer Definition die Nachfolgefunktion benutzt wird, indexikalische Zahlen und damit Zählzahlen voraus. Sowohl die aus den Summanden gebildeten Summen als auch die aus den Faktoren gebildeten Produkte sind daher relativ zu ihren Operanden als

Operata mit einem Wechsel von Zahlbereichen verbunden. Als semiotischen Satz formuliert: DIE ANWENDUNG EINER OPERATION AUF EINE KARDINALZAHL IMPLIZIERT IHRE SEMIOTISCHE GENERIERUNG ZUR ZÄHLZAHL. Summen und Produkte gehören damit einem von den Summanden und den Faktoren verschiedenen semiotischen Zahlbereich an.

2.2. Nun kann allerdings, wie bereits gesagt, die Multiplikation nicht aus der Addition definiert werden, da die Addition die Peano-Axiome voraussetzt und diese als Basiszahl die 0 und nicht die 1 verwenden. Daraus folgt, daß Summen und Produkte semiotisch gesehen ebenfalls verschiedenen Zahlbereichen angehören müssen. Semiotisch betzrachtet gibt es daher für Produkte nur die Möglichkeit, sie als Maßzahlen zu repräsentieren. Maßzahlen unterscheiden sich nun sowohl von den Kardinalzahlen als auch von der Zählzahlen dadurch, daß sie vermöge der dyadischen Dualrelation $(2.3) \times (3.2)$ einen Interpretantenbezug voraussetzen, der semiotisch die logische Subjektposition der vollständigen Zeichenrelation repräsentiert. Maßzahlen sind somit im Gegensatz zu Kardinalzahlen und Zählzahlen funktional subjektabhängig. Während man Additionen von Zahlen durch simple Adjunktion darstellen kann

$1 + 1 + 1 + 1 = 4$,

ist dies für Multiplikationen nicht möglich, denn $2 \cdot 2 = 4$ setzt eine Partition der Faktoren voraus, die Wittgenstein durch Addition von Einheiten definiert hatte, d.h.

$(1 + 1) \cdot (1 + 1\ ) = 4$,

und somit stehen die beiden Faktoren an ontisch verschiedenen Orten, d.h. die Faktoren sind relativ zu ihren Orten distribuiert, die Multiplikation operiert also nicht über vier Einheiten, sondern über JE ZWEI Einheiten. Man beachte, daß die Gleichung $2 \cdot 2 = 4$ auf lateinisch bis bina sunt quattuor bedeutet, worin also zwar das Produkt eine Kardinalzahl, die Faktoren aber Distributivzahlen sind. Es besteht also eine semiotische Relation zwischen Distributivzahlen und Maßzahlen, d.h. die symbolische Objektrelation repräsentiert vermöge der von ihr vorausgesetzten Subjektpräsenz beide sowohl Maßzahlen als auch Distributivzahlen.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Landau, Edmund, Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930

Wittgenstein, Ludwig, Tractatus logico-philosophicus. Oxford 1959

7.2.2015